MATEMATICA III

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE, INFORMATICA E STATISTICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
A.A. 21/22

DOCENTE: DOTT. GIULIO GALISE

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Prova scritta del 09.06.2022

Esercizio 1 *(6 punti)*. Siano

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\right\} \cup \{(1,0)\}.$$

- Rappresentare graficamente l'insieme B.

Dire, senza giustificare la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$;
- A è convesso;
- $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \partial B$.

Esercizio 2 *(9 punti)*. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \sin(x - 2y)\,.$$

(i) Determinare per quali direzioni $\mathbf{v}$ risulta

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = 0\,.$$

(ii) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,0,f(0,0))$.

(iii) Verificare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

(iv) Stabilire se esiste una funzione $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -f(x,y) \end{cases} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Esercizio 3 *(9 punti)*. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

(i) Determinare i punti stazionari di f.

(ii) Determinare massimo e minimo assoluti di f nella corona circolare

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Esercizio 4 *(9 punti)*. Calcolare

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^3 y e^{-x^2(1+y^2)}\, dxdy\,.$$

Determinare poi il valore dell'integrale doppio improprio

$$\iint_D x^3 y e^{-x^2(1+y^2)}\, dxdy$$

essendo $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\, y \geq 0\big\}$.